Réponses du devoir surveillé de Mathématiques n°7

Exercice 1 (calcul de l'inverse d'une matrice)

On a $M^2 - 2M + I_3 = 3M - 3I_3$ d'où $-M^2 + 5M = 4I_3$ et $\dfrac{1}{4}M(5I_3 - M) = I_3$, M est inversible et $M^{-1} = \dfrac{1}{4}(5I_3 - M) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (noyau et image d'un endomorphisme)

1. On a $\mathcal{K}er(f) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ et $\mathcal{I}m(f) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ de plus $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{K}er(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ ne sont pas supplémentaires.
2. On a $M^2 = \begin{pmatrix} -9 & 18 & -27 \\ -9 & 18 & -27 \\ 9 & -18 & 27 \end{pmatrix}$ d'où $\mathcal{K}er(f \circ f) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ et $\mathcal{I}m(f \circ f) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ de plus $\mathcal{K}er(f \circ f) \cap \mathcal{I}m(f \circ f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ donc $\mathcal{K}er(f \circ f)$ et $\mathcal{I}m(f \circ f)$ sont supplémentaires.

Exercice 3 (calcul des puissances d'une matrice)

1. On a $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On a $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. On en déduit que $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2.3^n & 3^n - 2^n & 3^n - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 3.2^n - 2.3^n - 1 & 3.2^n - 3^n - 2 & 3.2^n - 3^n - 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (une égalité de Taylor-Lagrange)

1. C'est du cours !
2. (a) On pose $\phi = f - g$, ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ et on a $\phi(a) = \phi(b)$ donc il existe $c \in]a;b[$ tel que $\phi'(c) = 0$, ϕ' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;c]$ or $\phi'(a) = \phi'(c)$ donc il existe $d \in]a;c[$ tel que $\phi''(d) = 0$.

   (b) On montre que $g(x) = f(a) + f'(a)x + \dfrac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{(b-a)^2}x^2$.

   (c) On en déduit qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $g''(c) = f''(c)$ soit
   $f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2}f''(c)$.
3. On considère la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse x_0 à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle.

   On a $\mathcal{C} : y = e^x$, $\mathcal{T} : y = e^{x_0} + (x - x_0)e^{x_0}$ et $e^x - e^{x_0} - (x - x_0)e^{x_0} = \dfrac{(x - x_0)^2}{2}e^c \geqslant 0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{T}$.

Exercice 5 (homographies et matrices)

1. (a) l'homographie f est définie sur $\mathbb{R}$ si $c = 0$ et sur $]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}; +\infty[$ sinon.

   (b) On a $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

   (c) On pose $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ et $g(x) = \dfrac{a'x + b'}{c'x + d'}$ alors $(f \circ g)(x) = \dfrac{(aa' + bc')x + (ab' + bd')}{(a'c + c'd)x + (b'c + dd')}$
   avec $(aa' + bc')(b'c + dd') - (ab' + bd')(a'c + c'd) = (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0$.
2. (a) On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ alors $MN = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix}$
   avec $(aa' + bc')(b'c + dd') - (ab' + bd')(a'c + c'd) = (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0$.

   (b) $M^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.